

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2014 – 2015 учебном году
7 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

2		
	6	
7		

К решению
задачи 7.1

7.1. *Квадрат из чисел называется магическим, если в нём суммы чисел во всех строках, во всех столбцах, а также на двух главных диагоналях равны между собой. В магическом квадрате 3×3 известны только три числа из девяти — см. рисунок. Восстановите магический квадрат.*

Решение: Пусть сумма чисел в каждой из строк (столбцов, диагоналей) равна S . Эта сумма называется магической. Тогда

в правом нижнем углу стоит число $S - 8$, в правом верхнем — число $S - 13$, а в центре левого столбца — число $S - 9$. Анализируя строки (сумма в каждой строке S), находим числа, стоящие в середине

2	11	$S-13$
$S-9$	6	3
7	1	$S-8$

2	11	5
9	6	3
7	1	10

верхней строки (это 11), в середине нижней (1), и в конце средней (3). Получается квадрат, как на левом рисунке. У него уже сумма чисел в каждой строке, в каждой диагонали, и в первом столбце S , поэтому для того, чтобы он был магическим, необходимо и достаточно, чтобы суммы

К решению задачи 7.1

чисел во втором и третьем столбцах равнялись S , то есть должны выполняться равенства $11 + 6 + 1 = S$ и $S - 13 + 3 + S - 8 = S$. Оба уравнения приводят к равенству $S = 18$. Получаем магический квадрат (см. рисунок справа).

Примечание 1: В приведённом решении обоснована единственность указанного магического квадрата. Для решения задачи она не требуется; достаточно просто привести квадрат на рисунке справа.

Примечание 2: Приведённый способ нахождения магического квадрата не единственен; возможны и другие решения.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
приведён верный магический квадрат	7 баллов
верно составлена система уравнений, решающая задачу но система решена неверно из-за арифметических ошибок	6 баллов
верно составлена система уравнений, решающая задачу, но эта система не решена	4 балла
верно найдены только некоторые числа квадрата и в решении не указан (или указан неверно) способ найти остальные числа	3 балла
введены переменные и имеется попытка (неудачная) записать условие в виде системы уравнений с этими переменными	1 балл

7.2. Имеются 4 одинаковых по виду арбуза, любые два из которых имеют разный вес. Покажите, как за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь найти пару самых тяжёлых арбузов.

Решение: Обозначим арбузы буквами A, B, C, D . Первыми двумя взвешиваниями сравниваем A с B и C с D . Без ограничения общности, пусть тяжелее оказались арбузы A и C . Сравниваем третьим взвешиванием их веса. Если перетянул арбуз A — то он самый тяжёлый; тогда вторым по тяжести не может быть арбуз D — арбузы A и C его тяжелее. Сравниваем последним взвешиванием арбузы B и C — задача решена. Аналогично, если при третьем взвешивании перевесит арбуз C , то он — самый тяжёлый, а второй по тяжести — либо D , либо A . Какой именно — определяется четвёртым взвешиванием.

Примечание: В приведённом решении сделано больше, чем требуется, а именно, найдена не только самая тяжёлая пара арбузов, но и установлено, какой арбуз самый тяжёлый, а какой — второй по весу. Авторам неизвестен способ нахождения за 4 взвешивания самой тяжёлой пары без выяснения, какой из арбузов самый тяжёлый, однако, это не означает, что его нет. Если такой способ будет приведён в решении — решение задачи полное.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
указан верный алгоритм для нахождения самой тяжёлой пары арбузов за 4 взвешивания	7 баллов
либо указан алгоритм, решающий задачу за 5 взвешиваний, либо приведённый алгоритм решает задачу только в частных случаях	3 балла
указан верный алгоритм для нахождения самого тяжёлого арбуза за 3 взвешивания без дальнейшего продвижения к решению	2 балла
алгоритмы, решающие задачу более, чем за 5 взвешиваний (в любом количестве)	0 баллов

7.3. У крестьянина была коза, корова и кобыла, и ещё стог сена. Сын крестьянина подсчитал, что этого сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу один месяц, или козу и корову $3/4$ месяца, или же корову и кобылу $1/3$ месяца. Отец не согласился с подсчётами сына. Докажите, что у него были на это основания, то есть сын неправ.

Решение:

Способ 1. (логический). Пусть сын прав. Рассмотрим стадо, состоящее из 2 коз, 2 коров и 2 кобыл, и пусть они питаются сеном в течение года. Тогда за это время будет съедено: одной козой и одной кобылой 12 стогов, второй козой и одной коровой 16 стогов, второй кобылой и второй коровой — ещё 36 стогов, а всего 64 стога. Значит, коза, корова и кобыла в год съедают 32 стога, а в месяц $32/12=8/3$ стога. Так как коза и кобыла съедают один стог в месяц, то остальные $5/3$ стога съедает корова. А за $3/4$ месяца она съест $5/4$ стога, в то время как вместе с козой она за это время съедает стог. Вывод: коза съедает в месяц отрицательное количество сена (точно $-1/3$ стога). Противоречие.

Способ 2. (алгебраический). Пусть коза, кобыла и корова съедают в месяц x , y и z стогов сена соответственно. Тогда имеем систему трёх уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ (x + z) \cdot \frac{3}{4} = 1, \\ (y + z) \cdot \frac{1}{3} = 1. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на $4/3$, третье — на 3, после чего вычтем третье уравнение из суммы первых двух. Получим $2x = 1 + \frac{4}{3} - 3$, откуда число x отрицательно. Это невозможно по смыслу переменной x .

Примечание 1: Система уравнений, возникшая в алгебраическом способе решения, может быть решена и иначе.

Примечание 2: Существуют принципиально другие логические решения.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство противоречивости утверждений сына	7 баллов
в принципиально верном доказательстве имеются арифметические ошибки (не влияющие на ход решения)	6 баллов
найденное какое количество сена съедают коза, корова и кобыла совместно за фиксированный промежуток времени	5 баллов
верно составлена, но не решена система уравнений, решающая задачу	3 балла
доказаны только некоторые верные факты, касающиеся скорости поедания сена животными (например, то, что корова прожорливее кобылы)	1 балл

7.4. Во фразе

РАЙОННАЯ ОЛИМПИАДА ДВЕ ТЫСЯЧИ ЧЕТЫРНАДЦАТОГО ГОДА
передвинем в каждом слове первую букву на последнее место:

АЙОННАЯР ЛИМПИАДАО ВЕД ЫСЯЧИТ ЕТЫРНАДЦАТОГОЧ ОДАГ.
Сделаем то же самое с полученным текстом, и так далее. Через какое число таких операций мы впервые вернемся к исходному тексту? Ответ обосновать.

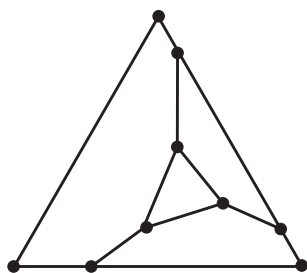
Решение: Каждое слово фразы впервые повторится после числа операций, равному числу букв в этом слове, то есть слово РАЙОННАЯ — через 8, ОЛИМПИАДА — через 9, ДВЕ — через 3, ТЫСЯЧИ — через 6, ЧЕТЫРНАДЦАТОГО — через 14 и ГОДА — через 4. Дальнейшие повторения будут через такое же число операций (например, слово ДВЕ повторится через 6, 9, 12, 15, ... операций). Чтобы вновь возник исходный текст, необходимо и достаточно, чтобы количество операций делилось без остатка на все числа 8, 9, 3, 6, 14 и 4, то есть оно должно делиться на НОК всех этих 6 чисел. Этот НОК равен $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$. Именно через столько операций текст повторится в первый раз.

Ответ: Через 504 операции.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и обоснованный ответ (доказано, что через 504 операции наступит повтор и наступит ВПЕРВЫЕ)	7 баллов
верное решение, приведшее к неверному ответу из-за арифметической ошибки (ошибок)	6 баллов
обосновано найдено некоторое количество операций (не минимальное), через которое обязательно возникнет повтор (напр. произведение количеств букв в словах)	4 балла
указано, что искомое число операций должно делиться на количество букв каждого слова	3 балла
верный ответ без доказательства того, что раньше повтора начальной позиции не случится	1 балл
поиск ответа прямым осуществлением указанного в задаче преобразования (если он не доведён до верного ответа)	0 баллов

7.5. Разрежьте равносторонний треугольник на 4 выпуклых многоугольника: треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и шестиугольник. (Многоугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда любая его диагональ целиком лежит внутри него.)



К решению
задачи 7.5

Решение:

Ответ: См. рисунок.

Примечание: Так как все многоугольники должны быть выпуклыми, никакие два из них не могут пересекаться иначе, чем по части стороны. Тогда среди сторон шестиугольника не более одной лежит на границе с каждой из трёх остальных фигур, поэтому остальные три его стороны должны лежать на сторонах исходного треугольника.

Несложно убедиться, что единственный допустимый случай — это когда шестиугольник и исходный треугольник имеют два общих угла (и сторону между ними). Аналогично показывается, что пятиугольник имеет с исходным треугольником общий угол. Таким образом, **не существует разрезов, принципиально отличающихся от приведённого**. Разумеется, то что данный треугольник правильный, не играет для решения никакой роли.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный пример разрезания	7 баллов
пример разрезания, при котором не все полученные многоугольники выпуклы	2 балла
указание факта, что правильность разрезаемого треугольника не существенна	1 балл
прочие разрезания, не удовлетворяющие условию (на большее число многоугольников, на многоугольники с другим числом сторон и пр.), в любом количестве	0 баллов

7.6. Восемь богатырей (среди них был Илья Муромец) вели бой со Змеем Горынычем. В каждой схватке погибала половина живых богатырей, но каждый богатырь в каждой схватке (даже если он погибал) срубал по одной голове у Змея. После каждой схватки, если у Змея оставалось $2N$ или $2N + 1$ голов (N — натуральное число), у него вырастало дополнительно ещё N голов. Так продолжалось до тех пор, пока в живых не остался один Илья Муромец. Он-то и срубил последнюю голову Змея. Сколько голов у Змея было в начале боя? Ответ обосновать.

Решение:

Способ 1. Решение с конца. В последнюю схватку у Змея отрубили только одну голову, поэтому перед последней схваткой голов у Змея не вырастало. Значит, после предпоследней схватки у Змея осталась одна голова. Так как эту предпоследнюю схватку вели два богатыря (один в итоге погиб), то перед ней у Змея было 3 головы. Одна из них выросла между предпоследней и третьей с конца схваткой. Значит, после третьей с конца схватки у Змея оставались 2 головы, а так как ту схватку вели уже 4 богатыря, то перед ней у Змея было 6 голов. Третью из них, то есть 2 головы выросли между четвёртой и третьей схватками (с конца). Значит после четвёртой схватки оставалось у Змея 4 головы. Схватку вели 8 богатырей, каждый срубил по голове, значит у Горыныча изначально было 12 голов.

Способ 2. У Змея явно больше 8 голов (иначе он будет убит в первую же схватку), но явно меньше 24 (иначе после каждой схватки он сможет восстанавливать все отрубленные головы). Достаточно просто перебрать все оставшиеся 15 возможностей (число голов с 9 до 23) и выбрать верный ответ. Но, конечно, перебор лучше сократить. Заметим, что схваток было 4 (в последней сразились Илья Муромец и последняя голова), за все схватки у Горыныча было отрублено $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ голов, ещё по крайней мере две выросло по ходу битвы (в паузах после первой и второй схваток; после третьей схватки, очевидно, головы не вырастали). Таким образом, изначально голов было не больше 13. Если их было ровно 13, то после первой схватки осталось бы 5, выросло 2, всего 7. После второй останется 3 голо-

вы, одна вырастет — всего 4, после третьей останется 2 головы, одна вырастет — итого 3, и трёхголовое чудовище уничтожит последнего богатыря. Аналогичный расчёт для 12 голов показывает, что это количество удовлетворяет условию задачи. Если же голов 11 (тем более, если меньше), то легко проверить, что за три схватки Змей будет убит. Значит, ответ 12 — единственный.

Ответ: 12 голов.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и обоснованный ответ с доказательством его единственности	7 баллов
неверный из-за ошибки в счёте ответ при верном в остальном решении	6 баллов
верный ответ (показано, что 12 голов удовлетворяет условию) без обоснования его единственности в частности, решение перебором случаев	4 балла
обосновано, что голов меньше, чем 24 и/или больше 8 (без дальнейшего продвижения)	3 балла
Не доведённая до ответа попытка решить задачу “с конца”	2 балла
указание на монотонность (с ростом числа голов уменьшается число выживших богатырей) без дальнейшего продвижения	1 балл
ответ без обоснования	0 баллов